数理解析研究所講究録
658巻 1988年 139-156

Local systemに対するHodge-Tate分解の理論について

奈良女子大 理 兵頭 治
(Osamu Hyodo)

複素数体上のHodge理論に対応する理論が、p進体上の多様体にも存在することは、Tate[13]によって発見された。以降、Fontaineらの努力により、p進体上の代数多様体のp進etale cohomologyと微分形式の間の関係についての理解は深まってきています。(文献[1]～[11])

Hodge分解のp進対応物として[13]で提出された、いわゆるHodge-Tate分解の予想は、Faltings[3]によって全く一般的に証明された。そこでは定数層のcohomology群が扱われているが、もっと一般のlocal systemのcohomologyを相手にした理論を作るのは大切なことと思います。例えば、Faltings[2]は、p-divisible groupに対応するlocal systemを考察して、modular formに対応するp進表現のHodge-Tate分解を導いている。

本稿では、local sytemに対して、そのHodge-Tate分解を定

義し、さらにHodge-Tate分解を持つようなlocal systemのcohomology群のHodge-Tate分解についての結果をのべます。§1では古典的なHodge-Tate分解の理論の復習をして、§2ではlocal systemのHodge-Tate分解の理論に本質的な役割を果たす群 S_∞ を導入します。§3では主要な結果をのべます。

記号を次のように定めておく。Kは完備離散付値体で、その整数環を O_K、剰余体を F とする。本稿では常に、$\mathrm{ch}\,K=0$ $\mathrm{ch}\,F=p>0$ で、F は完全体と仮定する。$\mathcal{G}_K$ で、Kの絶対Galois群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を表す。一般に $\mathcal{G}_K$ が連続的に作用する $\mathbb{Z}_p$-module M に対して、そのTate twist $M(r)$ は次のように定義される。$\chi: \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ をcyclotomic character、つまり、すべての1のp巾乗根 ζ に対して、$\sigma(\zeta)=\zeta^{\chi(\sigma)}$ をみたすものとする。$M(r)$ は加群としては M と同型で、$\mathcal{G}_K$ の作用が変わる。$x\in M$ に対応する $M(r)$ の元を x' と書くと、

$$\sigma(x') = ((\chi(\sigma))^r\cdot\sigma(x))'$$

となる。特に1の p^n 乗根全体の群を μ_{p^n} と書くと、

$$\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n} \quad , \quad \mathbb{Z}_p(r) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes r}$$

である。

§1. Hodge-Tate分解の古典理論.

$\mathcal{G}_K$ の p 進表現 V とは、有限次元の $\mathbb{Q}_p$-vector space で $\mathcal{G}_K$ の連続作用を持つものとします。$\mathcal{G}_K$ の p 進表現のなかで、代数幾何や保型形式から出てくるものには特別の良い性質があることが期待されます。この節では、その"良い性質"の1つであるHodge-Tate表現について復習します。(他のより強い条件は[5]にありますが、本稿では触れません。)

Hodge-Tate表現の定義をする前に、$\mathbb{C}_p$ という巨大な $\mathcal{G}_K$-module の性質を調べる必要がある。$\mathbb{C}_p$ は K の代数閉包の完備化として定義される。$\mathcal{G}_K$ の $\mathbb{C}_p$ 係数 continuous cohomology について、次の結果がある。

定理 (Tate[13]) (1) $\mathbb{C}_p(r)$ の $\mathcal{G}_K$ 不変部分は.

$$H^0(\mathcal{G}_K, \mathbb{C}_p(r)) := \mathbb{C}_p(r)^{\mathcal{G}_K} = K \quad (r=0), \quad 0 \quad (r \neq 0)$$

(2) $i \geq 1$ の時.

$$H^i(\mathcal{G}_K, \mathbb{C}_p(r)) \simeq \begin{cases} K & (i,r)=(1,0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さて、$\mathcal{G}_K$ の p 進表現 V に対して、K-vector space $D^i(V)$ を

$$D^i(V) = \left(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(i)\right)^{\mathcal{G}_K}$$

で定義する。すると、$D^i(V)(-i)$ は $V \otimes \mathbb{C}_p$ の部分になる。

命題　　自然な準同型
$$\bigoplus_i D^i(V)\otimes_K \mathbb{C}_p(-i) \longrightarrow V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p$$
は injective である。

証明は [12] Prop. 5 を参照。先の定理(1) を用いる。

定義.　V が Hodge-Tate 表現とは、命題の準同型が同型なることを言う。言い換えれば、次の等式がなりたつこと。
$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \sum_i \dim_K D^i(V)$$
(一般には、上の命題より、(左辺) ≧ (右辺) がなりたつ。)

補題　　Hodge-Tate 表現の部分、商、dual、直和、tensor 積は、また Hodge-Tate 表現になる。

証明は易しい。[4] 3.4 と同じ議論を用いる。

Hodge-Tate 表現の例をあげよう。

(1)　$\mathbb{Q}_p(r)$ は Hodge-Tate 表現で、(定理(1) より、)
$$D^i(\mathbb{Q}_p(r)) = K \quad (i=-r), \quad 0 \quad (i\neq -r)。$$

(2) (Hodge-Tate 分解、Faltings [3]) X を K 上の proper smooth variety とする。X の p進 etale cohomology 群 $H^m(\overline{X},\mathbb{Q}_p)$ ($\overline{X}=X\otimes_K\overline{K}$) は Hodge-Tate 表現でさらに

functionalな同型 $D^i(H^m(\overline{X},\mathbb{Q}_p)) \simeq H^{m-i}(X,\Omega^i)$
がある。つまり、次のfunctorialな同型がある。

$$H^m(\overline{X},\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i+j=m} H^j(X,\Omega^i)\otimes_K \mathbb{C}_p(-i)$$

§2. $\mathbb{C}_p$の高次元版 — S_∞の定義

この節以降の我々の主目的は次のようである。XをK上のproper smooth varietyとする。VをX_{et}上のsmooth $\mathbb{Q}_p$-sheaf, すなわち有限次元$\mathbb{Q}_p$-vector spaceで, $\pi_1(X)$の連続作用をもつものとする。このようなVに対して, VがHodge-Tate sheafであることの定義を与え、それが良い性質をみたすことを示す。例えば, §1の補題に対応すること, あるいは, proper smooth morphismによるHodge-Tate sheafのhigher direct imageもまたHodge-Tate sheafであること等である。§1の例(2)も自然に後者に含まれることになる。

Hodge-Tate sheafの定義はXのO_K上のmodelをとり, そのaffine open subschemeごとになされる。この節では, 各affine openごとに, $\mathbb{C}_p$の役割を果たすことになる巨大な群S_∞を構成し, その性質を述べる。大切になるのは, S_∞の構成がfunctorialに行われることと, §1のTateの定理と同様の結果が得られることである。

この節では次の性質をみたす O_K-algebra R をfixする。Rはintegral normalでO_K上flat, of finite type, さらに$R[1/p]$はK上smoothで, $d=$ rel. dim R/O_Kとすると, Rはdコのunit $\{u_1, .., u_d\}$で, $d\log(u_i)$が自由$R[1/p]$加群$\Omega^1=\Omega^1_{R[1/p]/K}$の基底になっているものを含んでいるとする。簡単のためKは$R[1/p]$中代数的に閉じているとする。

$\bar{R}$を$R[1/p]$の最大不分岐拡大中のRの整閉包とする。$\bar{R}$は巨大な環だが, 注意するのは, $\bar{R}\ni u_i^{1/p^m}$ $(\forall m)$, $\bar{R}\supset R\cdot O_{\bar{K}}$であることである。例えば, $R=O_K[T, T^{-1}]$なら, $\bar{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\bar{K}}[T^{1/n}, T^{-1}]$となる。簡単のため, $\Gamma=\mathcal{G}al(\bar{R}/R)$, $\Delta=\mathcal{G}al(\bar{R}/R\cdot O_{\bar{K}})$とおく。すると, $\Gamma/\Delta\simeq \mathcal{G}_K$である。

$\mathbb{C}_p$の類似物を考えるためには, まず$\mathbb{C}_p$が何に由来しているかを知る必要があります。結論を言ってしまうと, 答は[6]で重要な役割を果たしている次の定理から出てきます。

定理 (Fontaine [6]) 次の自然な準同型はsurjective。

$$O_{\bar{K}}\otimes\mu_{p^\infty}\longrightarrow\Omega^1_{O_{\bar{K}}/O_K}\ ;\ a\otimes\zeta\mapsto a\cdot d\log\zeta$$

(μ_{p^∞}は1のp巾根全体のなす群。) 核も次のようになる。(左辺) $\simeq O_{\bar{K}}\otimes(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)\simeq(\bar{K}/O_{\bar{K}})(1)$と書くとき, ある$c\in O_{\bar{K}}$があって, $(c^{-1}O_{\bar{K}}/O_{\bar{K}})(1)$が核になる。

定理よりただちに，

$$\left(\varprojlim_{n}\left(\Omega^1_{\bar{O}_{\bar{K}}/O_K}\right)_{p^n\text{-torsion}}\right)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p(-1)\simeq\mathbb{C}_p$$

となる。すなわち，$\mathbb{C}_p$ は微分加群から出てくるのです。([6] では，上の同型を用いて，abelian variety の Tate module が Hodge-Tate 表現であることを示していた。)

さて，それでは $\Omega^1_{\bar{R}/R}$ の構造がどうなっているか調べる必要があります。まず，一番簡単な場合 $R=O_K[T,T^{-1}]$ の時を考察してみる。この場合，次の完全系列

$$\bar{R}\otimes_{O_{\bar{K}}}\Omega^1_{O_{\bar{K}}/O_K}\to\Omega^1_{\bar{R}/O_K}\to\Omega^1_{\bar{R}/O_{\bar{K}}}\to 0$$

の最初の射は injective。 $\Omega^1_{\bar{R}/O_{\bar{K}}}$ の生成元は $\{d\log T^{1/n}\}_n$ だから $\bar{R}[1/p]\otimes_R\Omega^1_{R/O_K}\xrightarrow{\sim}\Omega^1_{\bar{R}/O_{\bar{K}}}$。右辺の生成元 $d\log T$ が丁度 $\Omega^1_{\bar{R}/R\cdot O_{\bar{K}}}$ 内で消えるから，完全列

$$(*)\quad 0\to\bar{R}\otimes_{O_{\bar{K}}}\Omega^1_{O_{\bar{K}}/O_K}\to\Omega^1_{\bar{R}/R}\xrightarrow{\gamma}(\bar{R}[1/p]/\bar{R})\otimes_R\Omega^1_{R/O_K}\to 0$$

を得る。(*) の射 γ は T の p巾乗根の列 $\{T^{1/p^n}\}$ を選ぶことによって，$\bar{R}$ 加群としての splitting をもつ。しかし，この splitting は Δ の作用を保たない。今の例では $\Delta\simeq\hat{\mathbb{Z}}$ なので，その生成元を σ とする。ζ_{p^n} を適当な 1 の原始 p^n 乗根とすると，$\sigma(T^{1/p^n})=\zeta_{p^n}\cdot T^{1/p^n}$，従って

$$\sigma(d\log T^{1/p^n})=d\log T^{1/p^n}+d\log\zeta_{p^n}\quad。$$

そして，$n\gg 0$ では $d\log\zeta_{p^n}\neq 0$ なのである。

さて、一般のRの場合にもどる。再び、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{R}\otimes_{O_{\overline{K}}}\Omega^1_{O_{\overline{K}}/O_K} & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^1_{\overline{R}/R} & \xrightarrow{\gamma} & \Omega^1_{\overline{R}/R\cdot O_{\overline{K}}} & \to 0 & \text{(exact)} \\ & & & & \uparrow \beta & & \\ & & & & (\overline{R}[1/p]/\overline{R})\otimes_R \Omega^1_{R/O_K} & & \end{array}$$

ここに、βはRの単数$\{u_i\}$を用いて

$$(a/p^n)\otimes d\log u_i \longmapsto a\, d\log u_i^{1/p^n}$$

で定義される。Faltings [3] により先の(*)にあたることは"大体"成立している。

定理.（Faltings [3]）ある自然数nがあって

Ker α, Ker β, Cok β はすべてp^n倍すると消える。

今、$M=(\varprojlim_n(\Omega^1_{\overline{R}/R})_{p^n\text{-torsion}})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p(-1)$ とおくと、

$$(**)\quad 0\to \hat{\overline{R}}[1/p] \longrightarrow M \xrightarrow{\gamma} \hat{\overline{R}}[1/p]\otimes_R\Omega^1_{R/O_K}(-1)\to 0$$

という完全列が得られたのである。（^はp進完備化をあらわす。）先の(*)の時と同様に、γは$\hat{\overline{R}}[1/p]$加群としてはsplittingをもつが、それはΔの作用を保たない。また、$d\log:\mu_{p^\infty}\longrightarrow\Omega^1_{\overline{R}/R}$により、自然な準同型 $\mathbb{Z}_p\longrightarrow M$ が得られる。これは単射で1つ固定した$\mathbb{Z}_p$の生成元を 1 と記す。Mは$\hat{\overline{R}}[1/p]$加群としては自由、rank $d+1$ で base $\{1, \text{“}d\log u_i\text{''}\}$となる。

いよいよ S_∞ の構成をする。

$$S_n := \mathrm{Sym}^n_{\hat{\bar{R}}[1/p]} M, \qquad S_\infty = \varinjlim_n S_n$$

ここで順極限は、$S_n \to S_{n+1}$; $[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]$

により走る。定義より、完全列

$$0 \to S_{n-1} \to S_n \to \hat{\bar{R}}[1/p] \otimes_R (\mathrm{Sym}^n_R \Omega^1_{R/O_K})(-n) \to 0$$

が得られる。以下 S_∞ の基本性質をのべる。

命題1. S_∞ 係数の continuous cohomology は次のとおり。

$$(1\text{-}1) \qquad H^i(\Delta, S_\infty) = \begin{cases} (R \cdot O_{\bar{K}})^\wedge [1/p] & (i = 0 \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$(1\text{-}2) \qquad H^i(\Gamma, S_\infty(r)) \simeq \begin{cases} R^\wedge [1/p] & (i, r) = (0,0), (1,0) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

(1-2) と、§1 でのべた Tate の定理が類似しているのが大切な所です。(1-2) は (1-1) と Spectral sequence

$$H^s(g_K, H^t(\Delta, S_\infty(r))) \Rightarrow H^{s+t}(\Gamma, S_\infty(r))$$

から出ます。(1-1) は、S_∞ の構成の仕方と、次の Faltings の定理から従います。

定理 (Faltings [3]) 次の canonical な同型がある。

$$H^i(\Delta, \hat{\bar{R}}[1/p]) \simeq (\Omega^i_{R/O_K}) \otimes_R (R \cdot O_{\bar{K}})^\wedge [1/p](-i)$$

同型の構成は、$i=1$ の時は $(\ast)$ を用い、$i>1$ では、両辺の積構造を用いる。

次に、S_∞ から、複体 $DR(S_\infty)$ を構成する。具体的には、

$$0 \to \underset{(0)}{S_\infty} \xrightarrow{\partial_0} \underset{(1)}{S_\infty \otimes_R \Omega^1_{R/O_K}(-1)} \xrightarrow{\partial_1} \underset{(2)}{S_\infty \otimes_R \Omega^2_{R/O_K}(-2)} \to \cdots$$

という形をしていて、differential は、

$$S_n \underset{R}{\otimes} \Omega^i_{R/O_K}(-i) \longrightarrow S_{n-1} \underset{R}{\otimes} \Omega^{i+1}_{R/O_K}(-i-1) \ ;$$

$$[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes \omega \ \longmapsto \sum_{1 \leq i \leq n} [x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes (\gamma(x_i) \wedge \omega)$$

(γ は $(\ast)$ にある準同型。) からひきおこされるものである。次の命題の証明も略する。

命題 2. $DR(S_\infty)$ は $\hat{R}[1/p]$ (degree 0 にのみある複体) と quasi-isomorphic。つまり $DR(S_\infty)$ は degree 0 以外で exact, $\mathrm{Ker}\ \partial_0 = \hat{R}[1/p]$。

§3. Hodge-Tate sheaf の定義と Global theory。

この節では、§2 で定義した S_∞ を用いて、Hodge-Tate sheaf の定義を行い、その性質を調べます。主定理は、proper smooth morphism による higher direct image もまた Hodge-Tate sheaf になるということです。

(3.1) R, Γ 等は §2 のとおりとして, まず 有限次元 $\mathbb{Q}_p$-vector space V で Γ の連続作用をもつものが Hodge-Tate であることを定義しよう。まず古典理論と同様の手法により次の命題が示される。

命題. $D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} S_\infty(i))^\Gamma$ とおく。自然な準同型

$$\bigoplus_i D^i(V) \otimes_{R^\wedge} S_\infty(-i) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} S_\infty$$

は injective。

定義. 命題の準同型が同型になる時 V は Hodge-Tate 表現 (あるいは $(\mathrm{Spec}\, R[1/p])_{et}$ 上の Hodge-Tate sheaf) という。

V が Hodge-Tate 表現とする時, $DR^i(D(V))$ を $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} DR(S_\infty)(i))^\Gamma$ で定義する。$DR^i(D(V))$ は

$$\underset{(0)}{0 \to D^i(V)} \longrightarrow \underset{(1)}{D^{i-1}(V) \otimes_{R^\wedge} \Omega^1_{R/O_K}} \to \underset{(2)}{D^{i-2}(V) \otimes_{R^\wedge} \Omega^2_{R/O_K}} \to$$

の形をしている。もちろん

$$\bigoplus_i DR^i(D(V)) \otimes_{R^\wedge} S_\infty(-i) \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}_p} DR(S_\infty)$$

がなりたつ。

古典理論と同様にして 次の補題がなりたつ。

補題. Hodge-Tate表現の部分、商、dual. 直和、tensor積は、またHodge-Tate表現になる。

(3.2) R'を§2の条件をみたす環、$f: \mathrm{Spec}\, R' \to \mathrm{Spec}\, R$を$O_K$-schemeのmorphismとする。$V$を$(\mathrm{Spec}\, R)_{et}$上のsmooth $\mathbb{Q}_p$-sheaf、つまり、有限次元$\mathbb{Q}_p$-vector spaceでΓの連続作用をもつものとする。§2で、S_∞はRに関してfunctorialに構成されたことから、次の補題が導かれる。

補題 VがHodge-Tateならば、f^*VもHodge-Tateである。しかも、 $D^i(f^*(V)) = D^i(V) \otimes_{R^\wedge} R'^\wedge$ 。

(3.3) XをK上のproper smooth varietyとする。X_{et}上のsmooth $\mathbb{Q}_p$-sheaf VがHodge-Tateであることを定義する。XのO_K上のmodel $\mathfrak{X}$をとる。$\mathfrak{X}$はnormalでO_K上proper, flat, $\mathfrak{X} \otimes_{O_K} K \simeq X$をみたす。

定義 VがHodge-Tate sheafとは、$\mathfrak{X}$のaffine open $\mathrm{Spec}\, R$で、Rが§2の条件をみたすものすべてに対して、Vの$(\mathrm{Spec}\, R[1/p])_{et}$へのひきもどしがHodge-Tateであることと定義する。

実際には，$\mathfrak{X}$ の open covering $\coprod \operatorname{Spec} R_i \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ について確かめれば良いことがわかる。model $\mathfrak{X}$ のとり方によらぬこともわかる。

各 affine open $\operatorname{Spec} R$ ごとに，有限生成 $\hat{R}[1/p]$ 加群 $D^i(V)$ が定まるが，これは (3.2) により sheaf になる。さらに $\mathfrak{X}$ は O_K 上 proper なので代数化されて，coherent O_X-module を定める。同様に $DR^i(D(V))$ も coherent O_X-module の複体を定める。記号の濫用により，これらも $D^i(V)$，$DR^i(D(V))$ と記す。さらに，(3.2) を $R' = O_L$（L は K の有限次拡大）に対してあてはめることにより，各 $D^i(V)$ は locally free とわかる。（X の各閉点での $D^i(V)$ の rank の和は常に $\dim V$ と等しくなければならない。）

(3.4) 結果をのべよう。X は K 上の proper smooth variety，V は X_{et} 上の Hodge-Tate sheaf とする。

定理．$H^m(\bar{X}, V)$ は Hodge-Tate 表現になる。さらに，次のような functorial な injection がある。

$$D^i(H^m(\bar{X}, V)) \hookrightarrow \mathbb{H}^m(X, DR^i(D(V))).$$

ここで $\mathbb{H}$ は hypercohomology を表す。

定理の injection は実際，同型と予想される。

例をあげよう。constant sheaf $\mathbb{Q}_p$ は Hodge-Tate sheaf で $D^i(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_X$ $(i=0)$, 0 $(i\neq 0)$ であることは、S_∞ の性質よりすぐわかる。従って、$DR^i(D(\mathbb{Q}_p)) \simeq \Omega_X^i[-i]$ (i 次のみ 0 でない複体) となる。これに定理をあてはめると、$H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)$ は Hodge-Tate sheaf で、functorial な単射 $D^i(H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) \hookrightarrow \mathbb{H}^m(X, \Omega^i[-i]) = H^{m-i}(X, \Omega^i)$ がある。実際、次元を数えることにより、この単射は全射であるとわかり、丁度 §1 の例(2)にあたることが出てくる。このように、我々の定理は Faltings の定理の自然な一般化になっている。

Relative version の結果も得られる。$f: X \to Y$ を K 上 proper smooth variety の間の proper smooth morphism、V を X_{et} 上の Hodge-Tate sheaf とする。

定理、$R^m f_* V$ は Y_{et} 上の Hodge-Tate sheaf。

$D^i(R^m f_* V)$ についての結果と、予想も先の定理と同様にのべられるが省略する。$V = \mathbb{Q}_p$ の時にどうなるかを説明しよう。まず、

$$D^i(R^m f_* \mathbb{Q}_p) \simeq R^{m-i} f_* \Omega^i_{X/Y}$$

である。$DR^i(D(R^m f_* \mathbb{Q}_p))$ の方は少し複雑になる。

Relative de Rham cohomology sheaf $H^m_{DR}(X/Y) = R^m f_* \Omega^{\cdot}_{X/Y}$
を考える。この sheaf には, Hodge filtration fil^i と, Gauss-Manin connection $\nabla : H^m_{DR}(X/Y) \to H^m_{DR}(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^1_{Y/K}$
がある。Hodge filtration は, $\mathrm{fil}^i / \mathrm{fil}^{i+1} \simeq R^{m-i} f_* \Omega^i_{X/Y}$
をみたし, Gauss-Manin connection は Griffiths transversality : $\nabla(\mathrm{fil}^i) \subset \mathrm{fil}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^1_{Y/K}$
をみたしている。従って Gauss-Manin connection は複体

$$\mathrm{fil}^i_{DR} : \mathrm{fil}^i \to \mathrm{fil}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^1_{Y/K} \to \mathrm{fil}^{i-2} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^2_{Y/K} \to$$

をひきおこし, その $gr^i_{DR} = \mathrm{fil}^i_{DR} / \mathrm{fil}^{i+1}_{DR}$ は

$$R^{m-i} f_* \Omega^i_{X/Y} \to (R^{m-i+1} f_* \Omega^{i+1}_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^1_{X/Y} \to$$

となる。$DR^{\cdot}(D(R^m f_* \mathbb{Q}_p))$ は gr^i_{DR} と同型である。

(3.5). (3.4) の定理の証明には, [3] の手法を用いる。X の O_K 上の model $\mathfrak{X}$ をとり, その affine open $\mathrm{Spec}\, R$ (R は §2 の条件をみたす) ごとに étale cohomology と, $\mathfrak{X}^{\wedge}$ 上の coherent module の cohomology を結びつけるのである。記号は §2 のとおりとし, $C^{\cdot}(\Delta, A)$ で Δ の A-係数 continuous cochain complex を表す。(その cohomology 群が $H^{\cdot}(\Delta, A)$ となる。) すると, 次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C^{\cdot}(\Delta, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \hat{R}[1/p]) \arrow[r, "\alpha"] & C^{\cdot}(\Delta, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} DR(S_\infty)) \arrow[dl, dash, "\simeq"'] \\
C^{\cdot}(\Delta, \bigoplus_i DR^{\cdot}(D(V)) \otimes_{R^\wedge} S_\infty(-i)) & \bigoplus_i DR^{\cdot}(D(V)) \otimes_{R^\wedge} (R \cdot O_K^\wedge)[1/p](-i) \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

ここで、α, β はそれぞれ、§2. 命題2. 命題1より quasi-isomorphism。中央の同型は Hodge-Tate sheaf の定義より出る。従って、[3] の手法により、自然な morphism

$$C^\cdot(\Delta, V) \longrightarrow C^\cdot(\Delta, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \hat{R}[1/p])$$

の両辺の Global cohomology をとって、

$$H^m(\bar{X}, V) \longrightarrow \bigoplus_i \mathbb{H}^m(X, DR^i(D(V))) \otimes_K \mathbb{C}_p(-i)$$

が得られる。あとは Poincare duality の議論を用いて、

$$H^m(\bar{X}, V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \subset \bigoplus_i \mathbb{H}^m(X, DR^i(D(V))) \otimes_K \mathbb{C}_p(-i)$$

が得られるのである。

(3.6) 以上で、概略の説明を終わります。詳しくは [9] を見て下さい。

本稿では、Hodge-Tate 表現の "variation" の理論についてのべました。この理論でも、予想は残っているし、non-proper case もできていないし、まだまだ問題は残されています。一方、Fontaine [5] には、Hodge-Tate 表現以外の "良い表現" の class が定義されています。これらの variation の理論をつくることは大切なことと思います。特に crystalline 表現の理論は、"filtered F-crystal (である種の条件を満たすもの)" と、"良い p進表現" の間の圏同値を与えるものであり、従って、crystalline 表現の variation 理論は、local system と、regular holonomic $\mathcal{D}_X$-module の間の

Riemann-Hilbert 対応の p進版にあたるものになっていると期待でき，大いに興味深いところです．最近 Faltings はこの方面で結果を得ているとのことです。

[1] S. Bloch and K. Kato, p-adic etale cohomology. Publ. Math. I.H.E.S. 63, 107-152 (1986)

[2] G. Faltings, Hodge-Tate structures and modular forms Math. Ann. 278, 133-149 (1987)

[3] G. Faltings, p-adic Hodge theory. to appear in Journal of AMS.

[4] J.-M. Fontaine, Modules Galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. Asterisque 65, 3-80 (1979)

[5] J.-M. Fontaine, Sur certains types de representations p-adiques du groupe de Galois d'un corps locaux. Ann. of Math. 115, 529-577 (1982)

[6] J.-M. Fontaine, Formes différentielles et modules de Tate des variétés abeliennes sur les corps locaux. Invent. Math. 65, 379～409 (1982)

[7] J.-M. Fontaine and W. Messing, p-adic periods and p-adic etale cohomology. Contemporary Math. 67, 179-209 (1987)

[8] O. Hyodo, A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case, to appear in Invent. Math.

[9] O. Hyodo, On variation of Hodge-Tate structures, preprint

[10] K. Kato, On p-adic vanishing cycles (applications of ideas of Fontaine-Messing). Advanced Studies in Pure Math. 10, 207-251 (1987)

[11] M. Kurihara, A note on p-adic etale cohomology. Proc. Japan Academy Ser. A 63, 275-278 (1987)

[12] J.-P. Serre, Sur les groupes de Galois attachés aux groups p-divisible. Proc. Conf. on local fields, 118-131, Springer (1967)

[13] J. Tate, p-divisible groups, Proc. Conf. on local fields, 158-183, Springer (1967)